COLLEGE TECHNIQUE HELEIS Yamoussoukro

BP : 2363 ☎ 30 64 77 33 Cel : 05 61 26 36 E-mail : collegeheleis@hotmail.fr

Site internet: www.collegeheleis.com

Page facebook : www.facebook.com/CollegeHeleisYamoussoukro/

Sis en face de la petite mosquée du quartier N'zuessy (Yamoussoukro)

Année Scolaire 2019-2020

Observation : *Suite à la mesure en vigueur depuis le 16 Mars 2020 relativement à la situation sanitaire que traverse la Côte d'Ivoire, nous proposons un système de formation continue basé sur des supports numériques audio et vidéos des cours, des fiches d'exercices et un chronogramme de correction en ligne dédiés à la continuité des cours pour nos apprenants en classe d'examen.*

L'apprenant pourra se munir à partir de la plateforme du Collège Heleis de ces supports afin de lui permettre de mieux s'exercer d'une part et d'autre part à accompagner l'action gouvernementale relative à sa formation continue initiée le 06 Avril 2020.

Fiche de cours résumé ……………………… **CALCUL INTEGRAL**……………………………………………

1. Rappel de cours sur les primitives

a) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F définie sur I telle que F'= f.

b) -Toute fonction définie et continue sur un intervalle I **admet** des primitives sur I.

-Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et k un nombre réel.

La fonction G définie sur I par G(x) = F(x) + k est **encore** une primitive de f sur I.

-Parmi toutes les primitives d'une fonction sur un intervalle I, il en existe une et seule prenant une valeur donnée y_0 pour une valeur x_0 de la variable.

Séance d'exercices n °1

Séquence 1 : Détermine des primitives sur R des fonctions suivantes :

$f_1(x) = x$; $f_2(x) = x^2$; $f_3(x) = 12x^{17} + x^3 - x$; $f_4(x) = x^3+2x^2+4x+1$; $f_5(x) = 1 - 2e^x$

$f_6(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$; $f_7(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$; $f_8(x) = e^{3x}$; $f_9(x) = \frac{4x}{x^2+1}$

Séquence 2 : Détermine la primitive F de la fonction f vérifiant la condition indiquée :

$f_1(x) = 2x+1$; I = R et F(1) = 2

$f_2(x) = (x+1)(x^2+2x+3)^3$; I =R et F(0) = 1

Exerce-toi , va à la correction et corrige tes erreurs

2. Calcul Intégral définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I, **a** et **b** deux éléments de I.

On appelle intégrale de **a** à **b** de f, le nombre réel noté $\int_a^b f(x)dx$ défini par :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Conséquences de la définition

$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$ et $\int_a^a f(x)dx = 0$

Séance d'exercices n °2 Calcul d'intégrales par primitivation

Calcule les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-2}^{3} x\,dx$; $I_2 = \int_{-4}^{0} x^2\,dx$; $I_3 = \int_{-3}^{3} x^{17}\,dx$; $I_4 = \int_0^1 1\,dx$; $I_5 = \int_{-ln2}^{ln3} e^{3x}\,dx$; $I_5 = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx$

$I_6 = \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$; $I_6 = \int_m^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$; $I_7 = \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2}\,dx$

Exerce-toi , va à la correction et corrige tes erreurs

3. Primitives et intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a un élément de I. La fonction F définie sur I par :

F(x) = $\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

4. Propriétés algébriques de l'intégrale

f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a , b , c des éléments de I, et k un réel, on a les propriétés suivantes :

a) Linéarité

Procéder à un calcul intégral d'une somme de fonctions f et g sur un même intervalle [a ; b] revient à faire la somme du calcul intégral de chacune des fonctions f et g.

<u>Propriété</u> 1 : $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

<u>Propriété</u> 2 : $\int_a^b (kf)(x)dx = k.\int_a^b f(x)dx$

<u>Exercice de fixation</u>

Calcule les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_{-1}^{1} 12x^{17}\,dx$; $I_2 = \int_2^3 \sqrt{2}\,x^2\,dx$; $I_3 = \int_0^1 \frac{4x}{x^2+1}\,dx$; $I_4 = \int_0^1 (x+1)(x^2+2x+3)\,dx$;

$I_5 = \int_{-3}^{3} (12x^{17} + x^3 - x)\,dx$; $I_6 = \int_0^1 (x^3 + 2x^2 + 4x + 1)dx$; $I_7 = \int_{-ln2}^{ln3} (1 - 2e^x)\,dx$

Exerce-toi , va à la correction et corrige tes erreurs

b) Relation de Chasles

<u>Propriété</u> 3 : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Exemple : Considérons la fonction définie par : $\begin{cases} pour\ x \in]-\infty\,;1\,],\ f(x) = 2x+1 \\ pour\ x \in [1\,;\ +\infty[,\ f(x) = -x+4 \end{cases}$ et continue sur R.

Calculons $\int_0^3 f(x)dx$

Résolution :

L'on constate que 0 ∈] − ∞ ; 1] pouvant donner la réunion des intervalles suivants :] − ∞ ; 0] ∪ [**0** ; **1**] et 3 ∈ [1 ; +∞[donnant la reunion des intervalles suivants : [**1** ; **3**] ∪ [3 ; +∞[

On a : $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx$

$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 (2x+1)dx + \int_1^3 (-x+4)dx$

$\int_0^3 f(x)dx = [x^2+x]_0^1 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_1^3$

Alors $\int_0^3 f(x)dx = 6$

<u>Exercice de fixation</u>

Calcule $\int_0^3 4\,|x-1|\,dx$

Exerce-toi , va à la correction et corrige tes erreurs

5. Inégalités et intégration

f et g étant deux fonctions continues sur un intervalle [$\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$].

Si f est positive sur [$\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$] alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (Positivité)

Si f ≤ g sur [$\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$] alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ (Comparaison)

6. Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I.

Si u' et v' sont continues sur I alors pour tous nombres réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)dx = [u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\, v(x)dx$$

Exemple 1 : A l'aide d'une intégration par parties, Calculons $\int_1^2 (x^2 lnx)dx$

Résolution :

Nous considérons la fonction lnx comme étant **u(x)** et la fonction x^2 comme étant **v'(x)**

Posons u(x) = lnx et v'(x) = x^2

On a : u'(x) = $\frac{1}{x}$ et v(x) = $\frac{1}{3}x^3$

Observons la propriété ci-dessus,

On obtient : $\int_1^2 (x^2 lnx)dx = \left[\frac{1}{3}x^3\, lnx\right]_1^2 - \int_1^2 (\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{3}x^3)dx$

$\int_1^2 (x^2 lnx)dx = \left[\frac{1}{3}x^3\, lnx\right]_1^2 - \int_1^2 (\frac{1}{3}x^2)dx$

$\int_1^2 (x^2 lnx)dx = \left[\frac{1}{3}x^3\, lnx\right]_1^2 - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^2$

$\int_1^2 (x^2 lnx)dx = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9}$

Exemple 2 : A l'aide d'une intégration par parties, Calculons $\int_0^1 (x+1)e^{2x})dx$

Résolution :

Dans cet exemple, nous considérons la fonction e^{2x} comme étant **u'(x)** et la fonction $x+1$ comme étant **v(x)**

Posons u'(x) = e^{2x} et v(x) = x + 1

On a : u(x) = $\frac{1}{2}e^{2x}$ et v'(x) = 1

Observons la propriété ci-dessus,

On obtient $\int_0^1 (x+1)e^{2x})dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}.(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,dx$

$\int_0^1 (x+1)e^{2x})dx = \left[\frac{1}{2}(x+1)e^{2x}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1$

$\int_0^1 (x+1)e^{2x})dx = \frac{1}{4}(3e^2 - 1)$

Exercice de fixation

A l'aide d'une intégration par partie, Calcule les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^2 lnx\, dx$; $I_2 = \int_{-1}^1 (x+2)e^{x+1}\, dx$; $I_3 = \int_1^2 \frac{lnx}{x^2}\, dx$; $I_4 = \int_1^2 ln(4x-1)\, dx$;

Exerce-toi , va à la correction et corrige tes erreurs

7. Valeur moyenne d'une fonction

f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b\,]$. On appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a\,;b\,]$, le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Exercice de fixation

Dans chacun des cas suivants, Calcule la valeur moyenne sur l'intervalle K de la fonction f définie ci-dessous :

$f_1(x) = e^{-x}$; $K = [\ln 2\,;\ln 3\,]$

$f_2(x) = x^3 + x - 3$; $K = [1\,;3\,]$

$f_4(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$; $K = [0\,;3\,]$

Exerce-toi , va à la correction et corrige tes erreurs

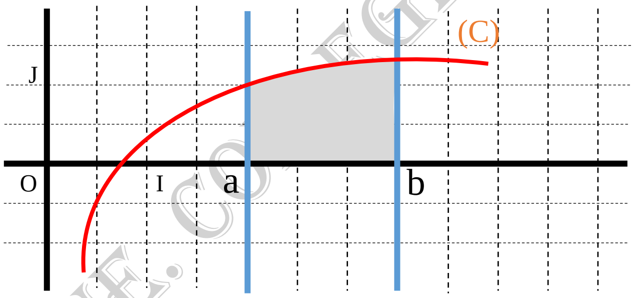
8. Calcul d'aires

Soit f et g deux fonctions de représentation graphique respectives (C) et (C') dans le plan muni d'un repère orthogonal (O,I,J) telle que f et g soient continues sur un intervalle $[a\,;b\,]$.

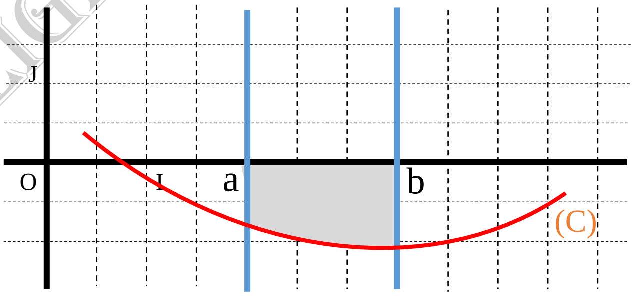
a) Calculons l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = a et x = b .

Notons $\mathcal{A}$ l'aire de ce domaine et ua l'unité d'aire

- Si f est positive sur $[a\,;b\,]$ alors $\mathcal{A} = \int_a^b f(x)dx \times$ ua



- Si f est négative sur $[a\,;b\,]$ alors $\mathcal{A} = -\int_a^b f(x)dx \times$ ua



Exercice de fixation

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

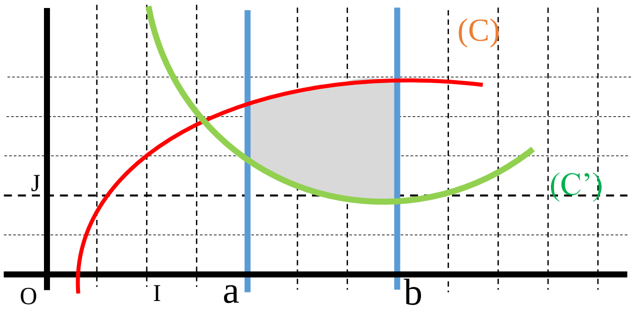
(C) est la représentation graphique de la fonction polynôme f définie par : $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Calculons l'aire de la partie du plan limitée par (C), (OI), les droites d'équations : x =1 et x = 2

b) Calculons l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C), (C') et les droites d'équations x = a et x = b

On suppose que (C) est au-dessus de (C') sur [a ; b]

Notons $\mathcal{A}$ l'aire de ce domaine et ua l'unité d'aire : $\mathcal{A} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ X ua



……………………………………………**TRAVAUX DIRIGES**………………………………………..

Exercice 1 : Calcul les intégrales suivantes :

$I_1 = \int_1^2 (3x^2 - 2x + 1)\,dx$; $I_2 = \int_0^1 \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2}\,dx$; $I_3 = \int_2^3 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,dx$; $I_4 = \int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx$;

$I_5 = \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x - 1 + \frac{1}{x^2})\,dx$; $I_6 = \int_0^1 (2x+3)(x^2 + 3x - 5)\,dx$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln x$.

On admet que f est dérivable sur]0 ; +∞[.

Déterminer f'(x)

En déduire la valeur de l'intégrale $\int_1^{e^2} (x\ln x + \frac{x}{2})\,dx$

Exercice 3

1) Vérifie que pour tout nombre réel x, $\frac{1}{e^x+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$
2) Calcule $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,dx$

Exercice 4

1) Vérifie que $\int_0^{\ln 2} e^t\,dt = 1$
2) On admet que : $\int_0^{\ln 2} te^t\,dt = 2\ln 2 - 1$, calcule $\int_0^{\ln 2} (2-t)e^t\,dt$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par : $f(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$

1) Détermine a et b pour que pour tout x appartenant à l'intervalle]0 ; +∞[, on ait : $\frac{x^2-1}{x(x^2+1)} = \frac{ax}{x^2+1} + \frac{b}{x}$
2) En déduire $\int_0^e f(x)\,dx$

Exercice 6

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A_n = \int_1^n (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - 1)\,dx$

1) Exprime A_n en fonction de n.
2) Calcule $\lim_{n \to +\infty} A_n$

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O,I,J).

(C) est la représentation graphique de la fonction polynôme f définie par : $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x-2}$

Calculons l'aire de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) asymptote de (C), les droites d'équations : x =-3 et x = -1